ΤΟΠΙΚΑ ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

Υπενθύμιση:

α) $U \subset \mathbb{R}^n$ συμπαγές (δηλ. κλειστό και φραγμένο) και $f: U \to \mathbb{R}^m$ συνεχής $\Rightarrow f(U) \subset \mathbb{R}^m$ συμπαγές

β) $U \subset \mathbb{R}^n$ συμπαγές και $f: U \to \mathbb{R}$ συνεχής $\Rightarrow f(U) \subset \mathbb{R}$ συμπαγές και η f "λαμβάνει μέγιστο και ελάχιστο" δηλ.

$\exists\, x_1, x_2 \in U \quad : \quad f(x_1) = \max\{f(x) : x \in U\}$

$f(x_2) = \min\{f(x) : x \in U\}$.

Το x_1 ονομάζεται "σημείο ολ. μεγ. της f", το x_2 ονομάζεται σημείο ολ. ελαχ. της f.

ΟΡΙΣΜΟΣ: Έστω $U \subset \mathbb{R}^n$ (ανοικτό)

Η $f: U \to \mathbb{R}$ παρουσιάζει στο $x \in U$:

α) Τοπικό ελάχιστο $\Leftrightarrow (\exists \varepsilon > 0): f(x) \leq f(y), \forall y \in B(x, \varepsilon) \subseteq U$

β) Τοπικό μέγιστο $\Leftrightarrow (\exists \varepsilon > 0): f(x) \geq f(y), \forall y \in B(x, \varepsilon) \subseteq U$

γ) τοπικό ακρότατο $\Leftrightarrow$ Το x σημείο τοπικού μεγίστου ή τοπικού ελαχίστου

Παρατήρηση

Το $f(x)$ είναι τοπικό ακρότατο.

Το x για το οποίο το $f(x)$ είναι τοπ. ακρότατο λέγεται σημείο τοπικού ακροτάτου της f.

δ) Γνήσιο τοπικό ελάχιστο $\Leftrightarrow (\exists \varepsilon > 0): f(x) < f(y), \forall y \in B(x, \varepsilon) \setminus \{x\}$

ε) Γνήσιο τοπικό μέγιστο $\Leftrightarrow (\exists \varepsilon > 0): f(x) > f(y), \forall y \in B(x, \varepsilon) \setminus \{x\}$

στ) Γνήσιο τοπικό ακρότατο $\Leftrightarrow$ Το x σημείο γν. τοπικού ελαχίστου ή τοπικού μεγίστου.

ΘΕΩΡΗΜΑ

[Αναγκαία συνθήκη τοπικού ακροτάτου]

Έστω $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό, $f: U \to \mathbb{R}$ μερικώς διαφορίσιμη (δηλαδή $\exists \nabla f(x) \in \mathbb{R}^n, \forall x \in U$) τότε ισχύει:

f έχει στο $x \in U$ τοπικό ακρότατο $\Longrightarrow \nabla f(x) = 0 \in \mathbb{R}^n$

(Δηλαδή το x είναι κρίσιμο σημείο)

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω $\varepsilon > 0$, με $B(x, \varepsilon) \subset U$. Οι συναρτήσεις $g_i: (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ $g_i(t) = f(x + t e_i)$ έχουν για $t = 0$ τοπικό ακρότατο. Αφού οι g_i είναι διαφορίσιμες έχουμε $g_i'(0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \xrightarrow[\text{ΑΠΔ}]{\text{Θ. Fermat}} g_i'(0) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = 0$

ΟΡΙΣΜΟΣ: Ένας τετραγωνικός πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ λέγεται

α) Θετικά ορισμένος $\Leftrightarrow u^T \cdot A \cdot u > 0, \forall u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

β) Θετικά ημιορισμένος $\Leftrightarrow u^T \cdot A \cdot u \geq 0, \forall u \in \mathbb{R}^n$

γ) αρνητικά ορισμένος $\Leftrightarrow 0 - A$ θετικά ορισμένος

δ) αρνητικά ημιορισμένος $\Leftrightarrow 0 - A$ θετικά ημιορισμένος

ε) μη ορισμένος $\Leftrightarrow A$ όχι θετικά ορισμένος, όχι αρνητικά ορισμένος δηλαδή για το (ε) $\exists u_1, u_2 \in \mathbb{R}^n : u_1^T A u_1 < 0 \wedge u_2^T A u_2 > 0$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

α) Ο πίνακας $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ θετικά ορισμένος

β) Ο πίνακας $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ Αρνητικά ορισμένος

γ) Ο πίνακας $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ θετικά ημιορισμένος

διότι $\left((x,y) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x,y) \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = x^2 \geq 0 \right., \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

δ) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ αρνητικά ημιορισμένος

ε) Ο πίνακας $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ μη ορισμένος

διότι $\left((x,y) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x,y) \cdot \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} = x^2 - y^2 = \begin{cases} < 0, & \forall (0,y), y \neq 0 \\ > 0, & \forall (x,0), x \neq 0 \end{cases}\right.$

ΠΡΟΤΑΣΗ (κρ. ιδιοτιμών)

Ένας συμμετρικός πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ($\Rightarrow \exists$ n ιδιοτιμές $\in \mathbb{R}$)

α) A θετικά ορισμένος $\Leftrightarrow$ όλες οι ιδιοτιμές θετικές

β) A θετικά ημιορισμένος $\Leftrightarrow$ " " " μη αρνητικές

γ) A αρνητικά ορισμένος $\Leftrightarrow$ " " " αρνητικές

δ) A αρνητικά ημιορισμένος $\Leftrightarrow$ " " " μη θετικές

ε) A μη ορισμένος $\Leftrightarrow$ " " " και θετ. και αρνητικές

ΠΡΟΤΑΣΗ (κρ. οριζουσών)

Ένας συμμετρικός πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ με:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{με } \Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}, \; k = 1, \dots, n$$

Είναι (α) θετικά ορισμένος $\Leftrightarrow \Delta_k > 0, \forall k = 1, \dots, n$

(β) αρνητικά ορισμένος $\Leftrightarrow (-1)^k \cdot \Delta_k > 0, \forall k = 1, \dots, n$

ΠΡΟΤΑΣΗ (κρ. για συμμετρικούς 2x2)

Ένας συμμετρικός $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ είναι:

α) θετικά ορισμένος $\Leftrightarrow a>0,\ |A|>0$

β) αρνητικά ορισμένος $\Leftrightarrow a<0,\ |A|>0$

γ) μη ορισμένος $\Leftrightarrow |A|<0$

ΘΕΩΡΗΜΑ (ικανή συνθήκη τοπ. ακρότατου)

Έστω $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό $f \in C^2(U)$ και $\nabla f(x_0) = 0$ σε κάποιο $x_0 \in U$. Τότε

α) Αν $H_f(x_0)$ θετικά ορισμένος $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ x_0 είναι σημείο γνήσιου τοπ. ελαχίστου

β) Αν $H_f(x_0)$ αρνητικά ορισμένος $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ x_0 είναι σημείο γνήσιου τοπ. μεγίστου

γ) Αν $H_f(x_0)$ μη ορισμένος $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ x_0 δεν είναι σημείο τοπ. ακρότατου
με x_0 συμμετρικό σημείο, σημείο σέλας.

ιδέα για το (α)

Taylor:

$$f(x) = f(x_0) + \overset{\to 0}{\nabla f(x_0)(x-x_0)} + \frac{1}{2}(x-x_0)^T H_f(x_0)(x-x_0) + o(\|x-x_0\|^2),\ x \to x_0$$

όπου $\nabla f(x_0) = 0$